

以“本”为源，夯实基础

■ 广东省佛山市南海区石门中学 徐守军 刘依舒

近几年，高考试题的命制越来越新颖多变，但是万变不离其宗，大多数高考题都能在教材中找到其“原形”。高考对数列的通项公式以及前 n 项和的考查也不例外。通过背景包装、更换数字、变条件、改结论等多种方式对教材的例题、习题进行重新加工，看似平常，实则有很多值得品味的东西。现以 2018 年全国 II 卷数列解答题为例，对其进行溯源，并进行同源变式、引申、提炼，以期对 2019 年的高考复习有所启示。

【例 1】 (2018 年高考全国 II 卷，理科第 17 题) 记 S_n 为等差数列的前 n 项和，已知 $a_1 = -7$ ， $S_3 = -15$ 。

- (1) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式；
- (2) 求 S_n ，并求 S_n 的最小值。

【思维导航】 等差数列中两个基本量 a_1 和 d ，该题考查了通过解方程，求出两个基本量，从而求出 $\{a_n\}$ 的通项公式。接下来代入等差数列的前 n 项和公式，就可以得到 S_n ，最后通过二次函数求最值得 S_n 的最小值。

【解答过程】 (1) 设 $\{a_n\}$ 的公差为 d ，由题意得 $3a_1 + 3d = 15$ 。

由 $a_1 = -7$ ，得 $d = 2$ 。

所以 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n = 2n - 9$ 。

(2) 由 (1) 得 $S_n = n^2 - 8n = [(n-4)^2 - 16]$ 。

所以当 $n = 4$ 时， S_n 取得最小值，最小值为 -16 。

【追根溯源】 此题源于人教 A 版必修 5 教材第二章等差数列前 n 项和第 51 页例 4：已知等差数列 $5, 4\frac{2}{7}, 3\frac{4}{7}, \dots$ 的前 n 项和为 S_n ，求使得 S_n 最大的序号 n 的值。该例题中给出了解法分析：等差数列的前 n 项和公式可以写成 $S_n = \frac{d}{2}n^2 + (a_1 - \frac{d}{2})n$ ，所以 S_n 可以看成函数 $y = \frac{d}{2}x^2 + (a_1 - \frac{d}{2})x$ ($x \in \mathbb{N}^*$ ，当 $x = n$ 时的函数值)。另一方面，容易知道 S_n 关于 n 的图像是一条抛物线上的一些点。因此，我们可以利用二次函数来求 n 的值。

解法一：由题意知， $5, 4\frac{2}{7}, 3\frac{4}{7}, \dots$ 的公差为 $-\frac{5}{7}$ ，所以

$$S_n = \frac{n}{2}[2 \times 5 + (n-1)(-\frac{5}{7})] = \frac{75n - 5n^2}{14} = -\frac{5}{14}(n - \frac{15}{2})^2 + \frac{1125}{56}.$$

于是，当 n 取与 $\frac{15}{2}$ 最接近的整数即 7 或 8 时， S_n 取最大值。

解法二：由题意可知， $5, 4\frac{2}{7}, 3\frac{4}{7}, \dots$ 的首项为 5，公

差为 $-\frac{5}{7}$ ，所以 $a_n = 5 + (n-1) \times (-\frac{5}{7}) = -\frac{5}{7}n + \frac{40}{7}$ 。

因为 $\{a_n\}$ 是公差 $d < 0$ 的等差数列，所以 $\{a_n\}$ 单调递减，要求 S_n 的最大值只要找 $a_n \geq 0$ 且 $a_{n+1} \leq 0$ 的 n 的值即可，解得 $n = 7$ 或 8。

【深度剖析】 高考试题只是把教材原题中的具体的前三项变成了前三项的和，数值上进行了变动，教材中的首项 $a_1 > 0$ ，公差 $d < 0$ 而高考试题中首项 $a_1 < 0$ 公差 $d > 0$ ，因此教材中的例题求 S_n 的最大值，高考题中求 S_n 的最小值。考点不变，还是考查等差数列的五个量， a_1 ， d ， n ， S_n 和 a_n ，围绕函数与方程的思想，求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式。高中数学教材中明确指出数列是一种特殊的函数，这意味着数列的本质就是函数，因此借助函数的思想更能深刻地理解数列的基本问题。数列是特殊的函数，就需要从函数的视角理解数列的基本性质。由于函数视角和函数观点的引入，给数列研究增添了新的活力，形成了一系列新的研究问题，从而推动了数列的发展。比如在本题中解决数列前 n 项和的最值问题有两种方法，①利用 a_n ：当 $a_1 > 0$ ， $d < 0$ 时，前 n 项和有最大值，可由 $a_n \geq 0$ 且 $a_{n+1} < 0$ 求得 n 的值；当 $a_1 < 0$ ， $d > 0$ 时，前 n 项和有最小值，可由 $a_n \leq 0$ 且 $a_{n+1} > 0$ 求得 n 的值；②利用 S_n ： $S_n = \frac{d}{2}n^2 + (a_1 - \frac{d}{2})n$ ，即由二次函数求得 S_n 取最值时 n 的值。

变式 1：等差数列 $\{a_n\}$ 中， $a_1 = -7$ ， $a_4 + a_6 = 2$ ，求 S_n 什么时候取得最小值。

解析：设公差为 d ，则 $a_1 + 3d + a_1 + 5d = 2$ ，又因为 $a_1 = -7$ ，解得 $d = 2$ ，所以 $S_n = n^2 - 8n = (n-4)^2 - 16$ ，所以当 $n = 4$ 时， S_n 取得最小值，最小值为 -16 。

【变式与思考 1】 该题主要体现方程思想，在数列的学习中，求未知量的时候，可以根据已知的条件，在已知量和未知量之间建立起联系，从而可以利用解方程求出未知量。等差数列通项或求和中共涉及五个基本量 a_1 、 d 、 n 、 S_n 、 a_n ，只要知道其中的 3 个量的值，可以转化成方程来求解。

变式 2：等差数列 $\{a_n\}$ 中， $a_1 < 0$ ， $S_3 = S_5$ ，求 S_n 什么时候取得最小值。(只要有 a_1 和 d 的倍数关系，就可求出 S_n 取最值对应的 n)

解法一：设公差为 d ，由 $S_3 = S_5$ ，得 $a_1 = -\frac{7}{2}d$ ，所以 $S_n = \frac{d}{2}n^2 + (-\frac{7}{2}d - \frac{d}{2})n = \frac{d}{2}n^2 - 4dn = \frac{d}{2}[n^2 - 8n] = \frac{d}{2}[(n-4)^2 - 16]$ ，所以当 $n =$